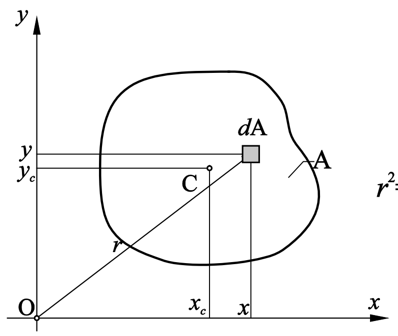
GEOMETRIJSKE
KARAKTERISTIKE RAVNIH POVRŠINA

Stanje napona i deformacija u napregnutoj gredi pored intenziteta, karaktera opterećenja i statičkog sistema, zavisi i od geometrijskih karakteristika poprečnog presjeka greda (ravne površine).

1. *OSNOVNE GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE POPREČNOG PRESJEKA*

Posmatra se ravna površina, postavljena u koordinatnom sistemu ***xy*** ograničena proizvoljnom konturom. Pretpostavimo da su dimenzije poprečnog presjeka date u *cm*. U okviru posmatrane površine izdvojen je element površine ***dA*** malih dimenzija (***dA = dx dy***).



$r^2=x^2+y^2$

1. Površina poprečnog presjeka: $\boldsymbol{A=\int_A dA}$, (cm^2), uvjek veća od nule;

2. Statički moment površine u odnosu na osu *x* (*y*): $\boldsymbol{S_x=\int_A y\,dA}$, $\boldsymbol{S_y=\int_A x\,dA}$, ($cm^3$), može biti pozitivan, negativan ili nula, u zavisnosti od položaja površine u odnosu na koordinatnu osu;

3. Koordinate težišta: $\boldsymbol{x_C=\dfrac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}=\dfrac{S_y}{A}}$ $\quad \boldsymbol{y_C=\dfrac{\int_A y\,dA}{\int_A dA}=\dfrac{S_x}{A}}$;

4. Aksijalni moment inercije poprečnog presjeka u odnosu na osu *x* (*y*):
   $\boldsymbol{I_x=\int_A y^2 dA}$, $\quad \boldsymbol{I_y=\int_A x^2 dA}$, ($cm^4$), uvjek veći od nule;

5. Centrifugalni moment inercije poprečnog presjeka u odnosu na ose *xy*:
   $\boldsymbol{I_{xy}=\int_A xy\,dA}$, ($cm^4$), može biti pozitivan, negativan ili nula, u zavisnosti od položaja površine u odnosu na koordinatni sistem.

   Ako je površina simetrična u odnosu na jednu od koordinatnih osa, centrifugalni moment je jednak nuli.

6. Polarni moment inercije poprečnog presjeka u odnosu na koordinatni početak ***O***:

   $\boldsymbol{I_0 = \int_A r^2 dA}$, ($cm^4$), uvjek veći od nule;

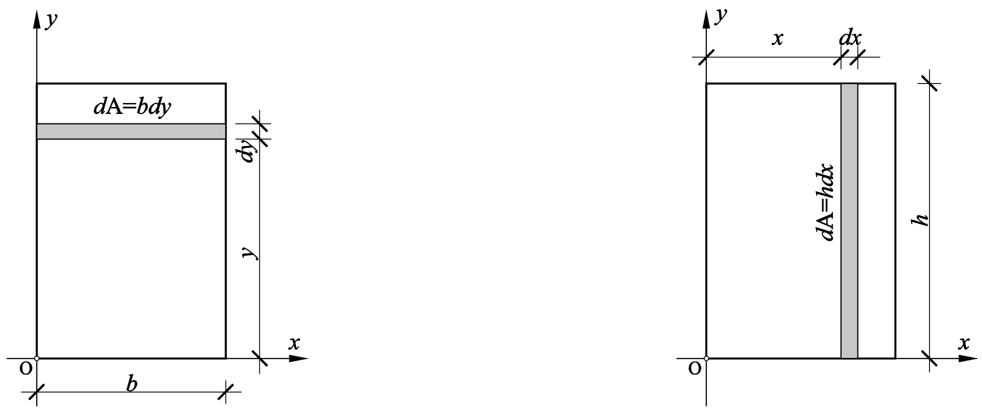
   $$I_0 = \int_A \left(x^2 + y^2\right) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x$$

   $\boldsymbol{I_0 = const}$ - zbir aksijalnih momenata inercije površine u odnosu na dvije ortogonalne ose se ne mijenja pri rotaciji koordinatnog sistema oko koordinatnog početka.

PRIMJER 1:

Za pravougaoni poprečni presjek dimenzija *b* x *h*, sračunati osnovne geometrijske karakteristike u odnosu na ose *x* i *y*.

Za određivanje geometrijskih karakteristika pravougaonika mali element ***dA*** možemo uzeti na jedan od dva načina prikazana na narednoj slici:



1. Površina

$$dA = b\,dy$$

$$A = \int_A dA = \int_A bdy = b\int_0^h dy = b\,h$$

$$dA = hdx$$

$$A = \int_A dA = \int_A hdx = h\int_0^b dx = b\,h$$

2. Statički momenti površine

$$S_x = \int_A ydA = \int_A ybdy = b\int_0^h ydy = \frac{bh^2}{2} \qquad \left(dA = b\,dy\right)$$

$$S_y = \int_A xdA = \int_A xhdx = h\int_0^b xdx = \frac{hb^2}{2} \qquad \left(dA = h\,dx\right)$$

3. Težište presjeka

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{hb^2}{2}}{bh} = \frac{b}{2}$$

$$y_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{bh^2}{2}}{bh} = \frac{h}{2}$$

4. Aksijalni momenti inercije

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A b y^2 dy = b\int_0^h y^2 dy = \frac{bh^3}{3} \qquad (dA = b\,dy)$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_A h x^2 dx = h\int_0^b x^2 dx = \frac{hb^3}{3} \qquad (dA = h\,dx)$$

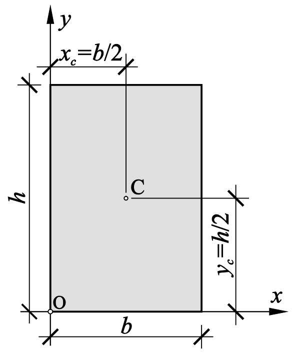
5. Centrifugalni moment inercije

$$I_{xy} = \int_A xy\,dA = \int_A xy\,dx\,dy = \int_0^b x\,dx \int_0^h y\,dy = \frac{b^2h^2}{4} \qquad (dA = dxdy)$$

6. Polarni moment inercije

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{bh^3}{3} + \frac{hb^3}{3} = \frac{bh}{3}\left(h^2 + b^2\right)$$

Konačno, geometrijske karakteristike prvougaonika su:



$$A = bh \quad x_C = \frac{b}{2} \quad y_C = \frac{h}{2}$$

$$S_x = \frac{bh^2}{2} \qquad S_y = \frac{hb^2}{2}$$

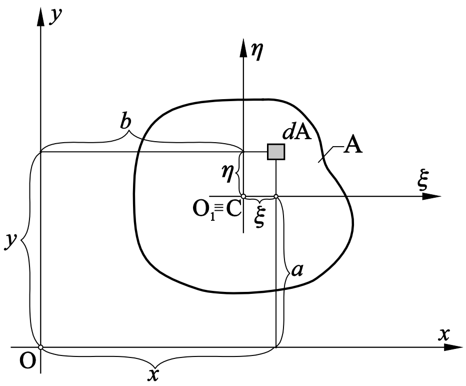
$$I_x = \frac{bh^3}{3} \qquad I_y = \frac{hb^3}{3}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4} \qquad I_0 = \frac{bh}{3}\left(h^2 + b^2\right)$$

2. *PROMJENA MOMENATA INERCIJE PRI TRANSLACIJI KOORDINATNOG SISTEMA (STEINER-ove FORMULE)*

Posmatramo zavisnost momenata inercije površine date na narednoj slici u odnosu na paralelne ose dva koordinatna sistema ***xy*** i ***ξη***. Dakle, poznate veličine su I_ξ, I_η, $I_{\xi\eta}$, ***a i b***, a potrebno je izračunati I_x, I_y, I_{xy}.

Ose ***ξη*** koje prolaze kroz težište (centar) O_1 poprečnog presjeka nazivamo **težišnim** ili **centralnim osama**. Takođe, momenti inercije za težišne ose nazivamo **centralni momenti inercije**.



Veza između koordinata dva sistema je

$$x = \xi + b \qquad y = \eta + a$$

pa je

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (\eta + a)^2 dA = \int_A \eta^2 dA + 2a\int_A \eta dA + a^2 \int_A dA$$

$$\mathbf{I_\xi = \int_A \eta^2 dA}$$

$$\mathbf{\int_A \eta dA = 0}$$

$$\mathbf{A = \int_A dA}$$

$$I_x = I_\xi + a^2 A$$

Analogno se dobija: $I_y = I_\eta + b^2 A$,

kao i centrifugalni moment:

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_A (\xi + b)(\eta + a) dA$$

$$= \int_A \xi\eta dA + a\int_A \xi dA + b\int_A \eta dA + ab\int_A dA = I_{\xi\eta} + abA$$

Pa je konačno:

$$\boldsymbol{I_x = I_\xi + a^2 A}$$

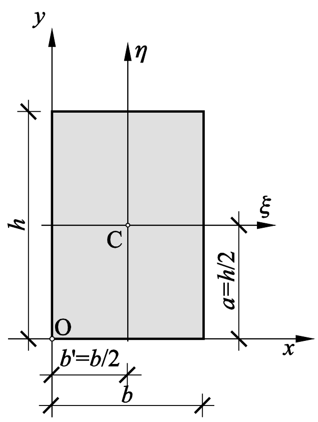
$$\boldsymbol{I_y = I_\eta + b^2 A}$$

$$\boldsymbol{I_{xy} = I_{\xi\eta} + abA}$$

Moment inercije površine u odnosu na neku osu jednak je zbiru sopstvenog momenta inercije u odnosu na paralelnu težišnu osu ($\boldsymbol{I_\xi}$, $\boldsymbol{I_\eta}$ i $\boldsymbol{I_{\xi\eta}}$) i položajnog momenta inercije ($\boldsymbol{a^2 A}$, $\boldsymbol{b^2 A}$ i $\boldsymbol{abA}$).

PRIMJER 2:

Za pravougaoni poprečni presjek na slici, sračunati centralne momente inercije za težišne ose $\boldsymbol{\xi\eta}$ koristeći Steiner-ovu formulu.



$$I_\xi = I_x - a^2 A = \frac{bh^2}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}$$

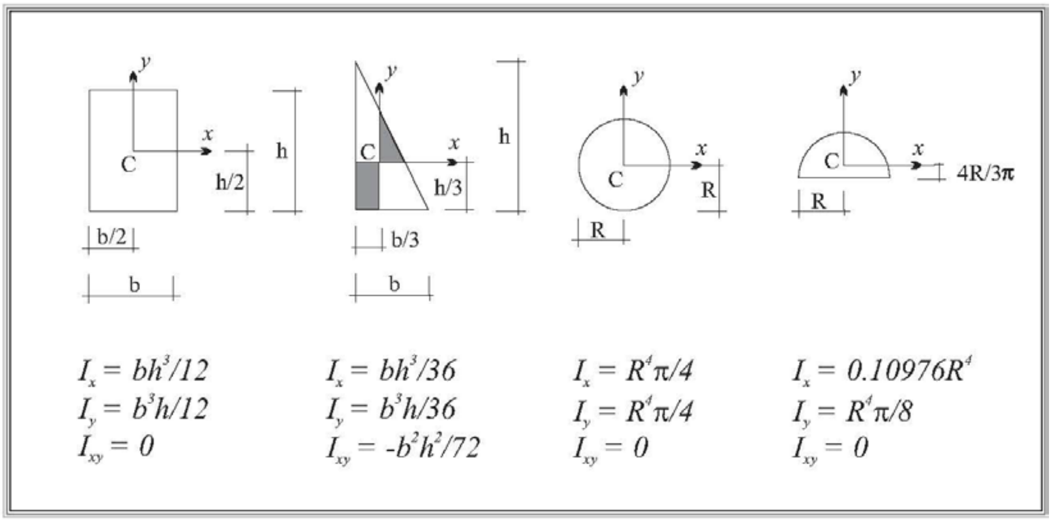
$$I_\eta = I_y - b'^2 A = \frac{hb^3}{3} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 bh = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{\xi\eta} = I_{xy} - ab' A = \frac{b^2h^2}{4} - \frac{h}{2}\frac{b}{2}\, bh = 0$$

Konačno, sopstveni momenti inercije pravougaonika stranica b x h iznose:

$$I_\xi = \frac{bh^3}{12} \qquad I_\eta = \frac{hb^3}{12} \qquad I_{\xi\eta} = 0$$

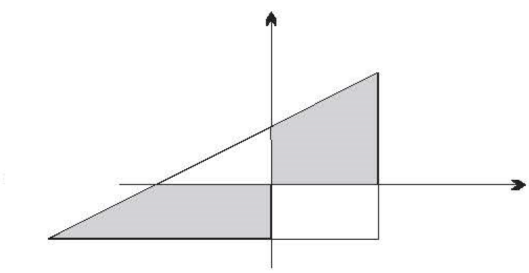
Na sličan način se mogu izvesti izrazi za sopstvene momente inercije preostalih osnovnih ravnih površina (pravouglog trougla, kružnice i polukružnice) koji su prikazani na narednoj slici.



Treba uočiti da se kod pravougaonika i trougla na treći stepen diže stranica koja je upravna na posmatranu osi.

Takođe može se vidjeti da su centrifugalni momenti inercije za figure koje imaju makar jednu osu simetrije jednaki nuli.

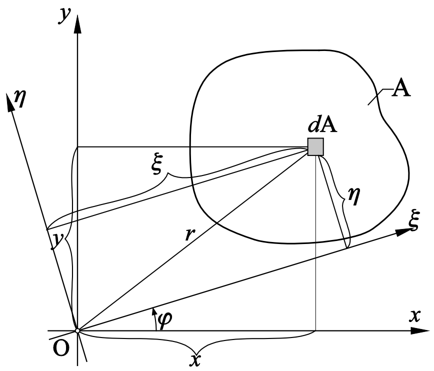
Posebnu pažnju treba obratiti na znak centrifugalnog momenta inercije trougla. Naime, znak zavisi od orjentacije trougla i koordinatnih osa odnosno od odnosa pozitivnih (na slici šrafiranih) i negativnih (na slici ne šrafiranih) površina. U gornjem slučaju negativne površine su veće od pozitivnih pa je centrifugalni moment inercije negativan. Međutim, npr za orjentaciju trougla i koordinatnih osa kao na slici niže odnos pomenutih površina je drugačiji pa je centrifugalni moment inercije pozitivan.



U slučaju lokalnog koordinatnog sistema kao na slici $I_{xy} > 0$

3. *PROMJENA MOMENATA INERCIJE PRI ROTACIJI KOORDINATNOG SISTEMA*

Ako su poznati momenti inercije za par upravnih koordinatnih osa $\boldsymbol{xy}$ koje prolaze kroz koordinatni početak $\boldsymbol{O}$, postavlja se pitanje čemu su jednaki momenti inercije za koordinatne ose $\boldsymbol{\xi\eta}$ koje su zarotirane za pozitivni ugao $\boldsymbol{\varphi}$ (suprotno kretanja kazaljke na satu). Dakle, poznate veličine su $\boldsymbol{I_x}$, $\boldsymbol{I_y}$, $\boldsymbol{I_{xy}}$ i $\boldsymbol{\varphi}$, a potrebno je izračunati $\boldsymbol{I_\xi}$, $\boldsymbol{I_\eta}$ i $\boldsymbol{I_{\xi\eta}}$.



Na osnovu jednostavne geometrijske zavisnosi se mogu dobiti sledeće zavisnosti:

$$\boldsymbol{I_\xi = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\varphi - I_{xy}\sin 2\varphi}$$

$$\boldsymbol{I_\eta = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) - \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\cos 2\varphi + I_{xy}\sin 2\varphi}$$

$$\boldsymbol{I_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\sin 2\varphi + I_{xy}\cos 2\varphi}$$

4. *GLAVNE OSE I GLAVNI MOMENTI INERCIJE*

U prethodnom poglavlju su prikazani izrazi za proračun momenata inercije pri rotaciji koordinatnog sistema. U Otpornosti meterijala su značajne ekstremne vrijednosti aksijalnih momenata inercije, kao i odgovarajuće ose. Postoje dvije granične ekstremne vrijednosti momenata inercije (maksimum i minimum) koje jednim imenom nazivamo **glavni momenti inercije**. Pravougle ose kojima odgovaraju glavni momenti inercije nazivamo **glavne ose inercije**. Glavnu osu maksimum označavamo sa (***1***), odnosno odgovarajući glavni maksimalni moment inercije ($\boldsymbol{I_1}$), dok glavnu osu minimum označavamo sa (***2***), odnosno odgovarajući glavni minimalni moment inercije ($\boldsymbol{I_2}$).

S obzirom da su momenti inercije u prethodnim formulama funkcije ugla $\boldsymbol{\varphi}$, proračun ekstremne vrijednost se svodi na traženje prvog izvoda prve i druge jednačine i njihovo izjednačavanje sa nulom, na osnovu čega se dobija ugao $\boldsymbol{\varphi = \alpha}$ koji definiše pravac ose (***1***) u odnosu na osu $\boldsymbol{x}$.

$$\boldsymbol{tg 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}}$$

Ugao $\boldsymbol{\alpha}$ se određije kako slijedi:

$$-\text{za } I_x > I_y \quad \alpha_1 = \frac{1}{2} arctg\left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}\right)$$

$$-\text{za } I_x < I_y \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}\left[arctg\left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}\right) + 180°\right]$$

Vrijednosti glavnih momenata inercije

$$\boldsymbol{I_1=\frac{1}{2}\left(I_x+I_y\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x-I_y\right)^2+4I_{xy}^2}}$$
$$\boldsymbol{I_2=\frac{1}{2}\left(I_x+I_y\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x-I_y\right)^2+4I_{xy}^2}}$$
$$\boldsymbol{I_{1,2}=0}$$

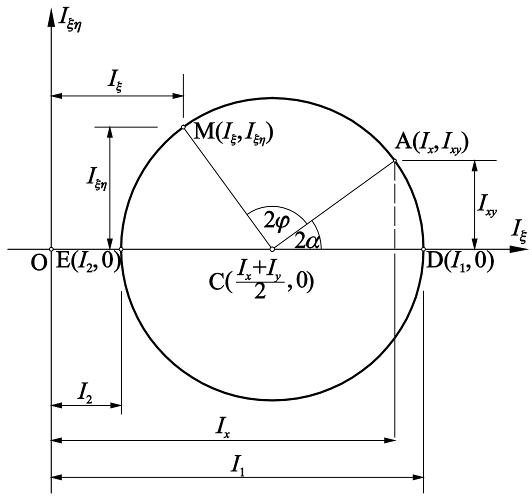
Centrifugalni moment inercije za sistem glavnih osa jednak nuli.

Svaka osa simetrije pioprečnog presjeka je ujedno i jedna od glavnih osa inercije, a druga upravna na nju.

5. *MOHR-OV KRUG INERCIJE*

Ako su poznati momenti inercije za koordinatni sistem $\boldsymbol{xy}$, određivanje momenta inercije za proizvoljan sistem zarotiranih osa, kao i određivanje glavnih momenata inercije i položaja glavnih osa inercije, moguće je i **grafički** pomoću Mohr-ovog kruga inercije.

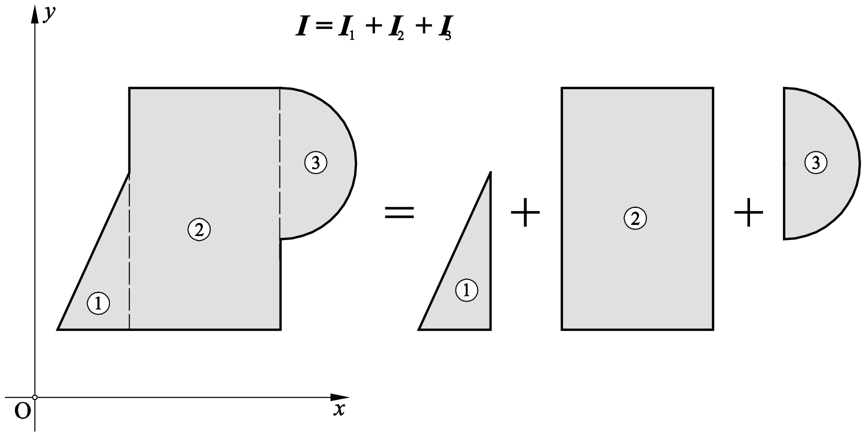
Mohr-ov krug inercije predstavlja geometrijsko mjesto tačaka čije su koordinate I_ξ i $I_{\xi\eta}$ aksijalni i centrifugalni momenti inercije date površine za sve parove upravnih osa ξ i η kroz posmatranu tačku.



Mohr-ov krug inercije konstruiše se tako što se prvo definiše tačka $\mathbf{C}\left(\frac{\mathbf{I_x+I_y}}{\mathbf{2}},\mathbf{0}\right)$ koja predstavlja centar kruga i tačka $\mathbf{A(I_x, I_{xy})}$ koja predstavlja tačku na krugu. Zatim se opiše krug poluprečnika **CA**. Da bi se konstruisao Mohr-ov krug potrebno je usvojiti razmjeru za grafičku konstrukciju npr $1cm=1000cm^4$.

6. *MOMENTI INERCIJE SLOŽENIH POVRŠINA*

Složeni poprečni presjek je presjek koji se sastoji od dvije ili više osnovnih površina (pravougaonik, pravougli trougao, kružnica i polukružnica). Momenti inercije složenog poprečnog presjeka se određuju kao zbir momenata inercije osnovnih površina kako je prikazano na narednoj slici.



Postupaki proračuna geometrijskih karakteristika je sljedeći:

1. Prvo se složena površina podijeli na najmanji mogući broj osnovnih površina;
2. Zatim se izabere najpogodniji položaj koordinatnog sistema ***xy*** u odnosu na koji se odredi težište složene površine;
3. Za prethodno određene težišne ose sračunaju se momenti inercije koristeći Štajnerove obrasce;
4. Na osnovu sračunatih momenata inercije odredi se položaj glavnih centralnih osa (ugao α);
5. Sračunaju se glavni centralni momenti inercije I_1 i I_2.

LITERATURA

1. R. Pejović, Građevinska mehanika (II dio) – OTPORNOST, Građevinski fakultet Univerziteta Crne Gore, Podgorica, 2014.
2. R. Pejović, Otpornost materijala, Građevinski fakultet Univerziteta Crne Gore, Podgorica, 2015.
3. V. Brčić, Otpornost materijala, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.
4. V. Lubarda, Otpornost materijala, Univerzitet „Veljko Vlahović“ u Titogradu, Titograd, 1989.